线性代数之几何与代数的融合

中国科学技术大学数学院

陈发来

2024.12.28

教学目标

- 线性代数作为大学最重要的基础课程之一，为学习后续专业课程提供重要的基础；
- 是自然科学、工程技术领域的重要工具；大数据与人工智能时代，线性代数的地位与作用越来越重要.
- 是一门培养学生抽象思维能力的课程.

- 掌握线性代数的基本概念、知识、思想与方法，为学习后续课程打下坚实基础；
- 熟练地将线性代数知识应用于自然科学与工程技术领域；
- 培养学生的抽象思维能力.

课程内容

现有教科书的前言:

线性代数是研究线性空间及其线性空间上的线性变换的课程.

本人观点:

线性代数是研究矩阵理论、线性空间及其线性空间上的线性变换的课程.

课程内容:

- 代数: 矩阵与行列式
- 几何: 线性空间与线性变换
- 度量空间: 内积空间与变换

矩阵理论与线性空间及变换紧密相连!

线性方程组的解集 ⇔ 高维空间超平面的交集

⇔ 线性空间及其平移

Example

例1 三维直角坐标系中，三个平面

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

相交于一条直线的充要条件是什么？

解：上述问题等价于线性方程组有解，且对应齐次方程组解空间是一维，因此等价条件是

$$rank \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\text{行列式} \Leftrightarrow \text{平行多面体的有向体积}$$

$$\text{行列式}\det(A) \Leftrightarrow \text{线性变换}\mathbf{y} = A\mathbf{x}\text{前后区域体积之比}$$

Example

例2 求长半轴与短半轴分别为a,b的椭圆E的面积.

解 E可以由单位圆通过线性变换$x' = ax, y' = by$得到，故椭圆面积为$\pi \cdot \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \pi ab$.

Example

例3 多元函数积分换元公式.

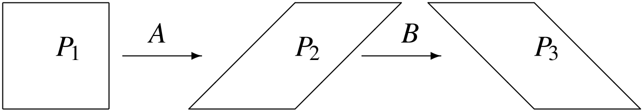
解

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\det(J)\,du\,dv.$$

Example

例4 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$的几何意义.

解. P_1面积为1, P_2面积为$\det(A)$, P_3面积为$\det(A)\cdot\det(B)$. 另一方面, 线性映射A与B的复合映射将P_1映为P_3, 故P_3的面积为$\det(AB)$.



Example

例5 Cramer法则(n=3)的几何解释.

解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}.$$

两边点乘$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ 得

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 x_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3.$$

于是

$$x_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}.$$

矩阵乘法

矩阵A $\Leftrightarrow$ 数组空间上的线性映射$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

矩阵乘法 $\Leftrightarrow$ 线性映射的复合

$$A \in F^{m\times n} \Leftrightarrow \mathscr{A} : \mathbf{y} \in F^n \to A\mathbf{y} \in F^m$$

$$B \in F^{n\times p} \Leftrightarrow \mathscr{B} : \mathbf{x} \in F^p \to B\mathbf{x} \in F^n$$

$$C = AB \in F^{m\times p} \Leftrightarrow \mathscr{A} \circ \mathscr{B} : \mathbf{x} \in F^p \to (AB)\mathbf{x} \in F^m$$

矩阵乘法运算规则—映射的复合规则($AB \neq BA$, $AB = 0$ 不能推出$A = 0$或$B = 0$).

Example

例6 是否存在实方阵A满足$A^2 = -I$?

解:

$$-I = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ -\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \text{——旋转}\pi\text{的旋转变换}$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad P^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

令

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

即满足要求.

矩阵的秩

设$A \in F^{m\times n}$.

- A的行空间 $R(A)$—行向量生成的空间.
- A的列空间 $C(A)$—列向量生成的空间.
- A的零空间 $N(A) = \{\mathbf{x} \in F^n \,|\, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

则

$$rank(A) = \dim R(A) = \dim C(A) = n - \dim N(A).$$

用$\mathscr{A}$ 表示A对应的线性映射. 则

$$rank(A) = \dim(Im\,\mathscr{A}) = n - \dim(Ker\,\mathscr{A}).$$

零空间与像空间维数之间的关系:

$$\dim V = \dim(Ker\,\mathscr{A}) + \dim(Im\,\mathscr{A}).$$

线性方程组独立方程的个数,

矩阵的秩

Example

例7 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 证明

$$rank(A)+rank(B)-n \le rank(AB) \le rank(B).$$

证明.

记B的行向量为$\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$, $A=(a_{ij})$. 则

$$rank(B)=\dim R(B)=\dim\langle \mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_p\rangle,$$

$C=AB$的第i行为$\mathbf{c}_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{b}_j$, $i=1,2,\ldots,m$. 故

$$\langle \mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_m\rangle \subset \langle \mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_p\rangle$$

从而

$$rank(AB)=\dim\langle \mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_m\rangle \le \dim\langle \mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_p\rangle = rank(B).$$

矩阵的秩

.

下证: $rank(B)-rank(AB)\le n-rank(A)$. 用$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$表示A,B对应的线性映射.

$$F^p \xrightarrow{\mathscr{B}} F^n \xrightarrow{\mathscr{A}} F^m.$$

记$\tilde{\mathscr{A}}:=\mathscr{A}|_{ImB}$. 由$Im(\tilde{\mathscr{A}})\subset ImB$ 即知$rank(AB)\le rank(B)$. 另一方面

$$\dim(Ker\tilde{\mathscr{A}})=\dim(ImB)-\dim(Im\tilde{\mathscr{A}})=rank(B)-rank(AB)$$

显然, $Ker\tilde{\mathscr{A}}\subset Ker\mathscr{A}$. 故由$\dim(Ker\tilde{\mathscr{A}})\le\dim(Ker\mathscr{A})$ 即可得证. $\square$

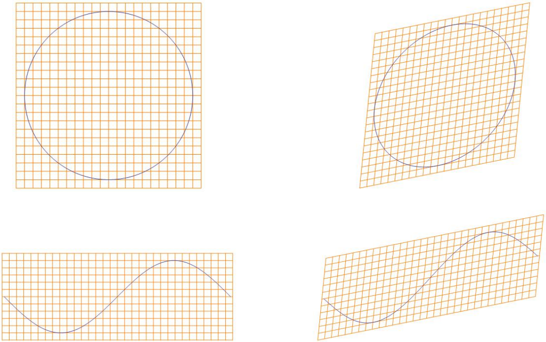
线性变换

线性变换: $\mathscr{A}(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\mathscr{A}\alpha+\mu\mathscr{B}\beta$.

线性变换的几何意义: 线性变换将直线映射为直线, 平行直线映射为平行直线—旋转、伸缩、错切、反射等.

考虑坐标平面上的变换

$$x'=x+0.1y,\qquad y'=0.2x+y.$$

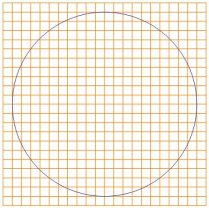


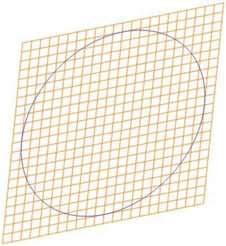
特征值与特征向量

特征值与特征向量: $\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$.

特征向量α—变换前后保持不变的方向; 特征值λ—-沿特征方向变换的伸缩比例.

线性变换将图形沿若干方向进行了伸缩(加反射).





- 正交变换—保持度量不变—刚体变换—特征值模长必为1.
- 对称变换—在相互正交的特征方向的伸缩加反射.

Example

例8 线性变换$\mathbf{y}=A\mathbf{x}$将单位圆变为椭圆，这里$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 则椭圆长短半轴的长度是多少？椭圆的面积是多少？

解 矩阵A的特征值为$\lambda_{1,2}=(3\pm\sqrt{5})/2$. 故椭圆长短半轴的长度分别为$\lambda_1,\lambda_2$. 椭圆长短轴的方向分别为对应特征向量$\mathbf{x}_{1,2}=(1,(1\pm\sqrt{5})/2)^T$. 椭圆面积$\pi\det(A)=\pi$.

矩阵标准形

相抵标准形: 设$A \in F^{m\times n}$, 则存在m阶可逆方阵P及n阶可逆方阵Q满足

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

这里$r = r(A)$是矩阵A的秩.

几何意义: 线性映射$\mathscr{A} : U \to V$在U, V的某一对基$B_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 及$B_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 即

$$\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, r, \quad \mathscr{A}\alpha_i = 0,\ i = r+1, \ldots, n.$$

于是

$$Im\mathscr{A} = \langle \beta_1, \ldots, \beta_r \rangle, \quad rank(\mathscr{A}) = r = \dim(Im\mathscr{A}).$$

矩阵标准形

相似标准形: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在可逆方阵$P$满足

$$PAP^{-1} = J$$

这里J是A的Jordan标准形.

几何意义: 线性变换$\mathscr{A}: V \to V$在V的某一组基$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为J, 即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)J.$$

矩阵标准形

相合标准形: 设A为n阶对称方阵, 且$r(A)=r$. 则存在n阶可逆方阵P满足

$$PAP^T = D = diag(a_1,\ldots,a_r,0,\ldots,0),$$

其中$a_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots,r$. 特别地, 若A为实对称正定方阵, 则

$$P^TAP = I_n.$$

几何意义: 对称双线性函数$f:V\times V\to F$在V的某一组基$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$下的矩阵为对角阵$D$, 即

$$f(\alpha,\beta) = a_1x_1y_1+\ldots+a_rx_ry_r,$$

这里$(x_1,\ldots,x_n)^T$为α在基B下的坐标, $(y_1,\ldots,y_n)^T$为β在基B下的坐标, $0\neq a_i\in F$.

矩阵标准形

正交相抵标准形: 设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则存在正交方阵$O_1, O_2$满足

$$O_1 A O_2 = \begin{pmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中$\Lambda = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \ldots \sigma_r > 0$为$A$的奇异值.

几何意义: 线性映射$\mathscr{A} : U \to V$在欧氏空间U, V的某一对标准正交基$B_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 及$B_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 即

$$\mathscr{A}\alpha_i = \sigma_i \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, r, \quad \mathscr{A}\alpha_i = 0,\ i = r+1, \ldots, n.$$

于是$\mathscr{A}$将α_i, $i = 1, \ldots, r$变为相互正交向量组, 其模长为σ_i, $i = 1, \ldots, r$. 同时有

$$Im\mathscr{A} = \langle \beta_1, \ldots, \beta_r \rangle, \quad rank(\mathscr{A}) = r = \dim(Im\mathscr{A}).$$

矩阵标准形

正交相似/相合标准形: 设A为n阶实规范方阵, 则存在正交方阵O满足

$$OAO^{-1} = diag\left(\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{pmatrix}, \lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n\right),$$

其中$\lambda_1 = a_1 + ib_1, \dots, \lambda_s = a_s + ib_s, \lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n$ 为A的特征值. 特别地, 实对称方阵正交相合于$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 为A 的特征值.

几何意义:

- 正交变换是旋转、反射变换的复合;
- 对称变换是沿相互正交方向的伸缩、反射变换的复合;
- 规范变换是沿相互正交方向的伸缩、旋转及反射变换的复合.

矩阵标准形

规范变换$\Leftrightarrow$ 规范矩阵

正交变换$\Leftrightarrow$ 正交矩阵

对称变换$\Leftrightarrow$ 对称矩阵

$\mathscr{A}$是V上规范变换. 则V可以分解为2维及1维不变子空间直和$\Leftrightarrow$ 规范方阵正交项式标准形

设W是欧氏空间V上规范变换$\mathscr{A}$的不变子空间. 则$W^{\perp}$ 也是$\mathscr{A}$ 的不变子空间$\Leftrightarrow$ 准上三角阵A为规范方阵当且仅当A为准对角阵.

矩阵标准形

Example

例9 设A为n阶. 证明: 存在可逆方阵P使得$(PA)^2 = PA$.

证明.

设$\mathscr{A}: V \to V$是在某一对基下与A对应的线性映射. 则存在V 的一对基$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 及$\beta_1, \ldots, \beta_n$ 使得

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令$\mathscr{P}$ 是由下式定义的线性映射:

$$\mathscr{P}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

则$\mathscr{P}$可逆, 且

$$\mathscr{P}\mathscr{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

进而

$$(\mathscr{P}\mathscr{A})^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\mathscr{P}\mathscr{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

由此, $(\mathscr{P}\mathscr{A})^2=\mathscr{P}\mathscr{A}$, 即存在可逆方阵$P$使得$(PA)^2=PA$. $\square$

Example

例10 设$A,B\in F^{m\times n}$, $rank(A)=r$, $rank(B)=s$, 这里$r+s\leq\min(m,n)$. 证明: $rank(A+B)=rank(A)+rank(B)$ 的充分必要条件是, 存在m阶可逆方阵P与n阶可逆方阵Q使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad PBQ=\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix}.$$

证明.

令$\mathscr{A},\mathscr{B}:U\longrightarrow V$ 是在某一对基下与A,B对应线性映射, 则

$$Ker(\mathscr{A})\cap Ker(\mathscr{B})\subset Ker(\mathscr{A}+\mathscr{B})\Rightarrow$$
$$\dim(Ker(\mathscr{A})\cap Ker(\mathscr{B}))\leq\dim Ker(\mathscr{A}+\mathscr{B})\Rightarrow$$
$$\dim(Ker(\mathscr{A})+\dim Ker(\mathscr{B})-\dim(Ker(\mathscr{A})+Ker(\mathscr{B}))$$
$$\leq\dim Ker(\mathscr{A}+\mathscr{B})\Rightarrow$$

由$\dim Im(\mathscr{A}+\mathscr{B})=r+s$,

$$n-r+n-s-\dim(Ker(\mathscr{A})+Ker(\mathscr{B}))\leq n-(r+s)\Rightarrow$$

$$\dim(Ker(\mathscr{A})+Ker(\mathscr{B}))=n\Rightarrow Ker(\mathscr{A})+Ker(\mathscr{B})=V.$$

令$U_2=Ker(\mathscr{A})\cap Ker(\mathscr{B})$, 则存在子空间$U_1,U3$ 满足

$$Ker(\mathscr{A})=U_2\oplus U_3,\quad Ker(\mathscr{B})=U_1\oplus U_2.$$

于是$U=U_1\oplus U_2\oplus U_3$, 且

$$\dim U_1=r,\quad \dim U_2=n-r-s,\quad \dim U_3=s.$$

分别取U_1,U_2,U_3的一组基$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$, $\{\alpha_{r+1},\dots,\alpha_{n-s}\}$, $\{\alpha_{n-s+1},\dots,\alpha_n\}$. 令$\beta_i=\mathscr{A}\alpha_i$, $i=1,\dots,r$, $\beta_i=\mathscr{B}\alpha_{i+n-m}$, $i=m-s+1,\dots,m$. 则

$$Im(\mathscr{A}) = \langle \beta_1, \ldots, \beta_r \rangle, \quad Im(\mathscr{B}) = \langle \beta_{m-s+1}, \ldots, \beta_m \rangle$$

由$r(A+B) = r(A) + r(B)$ 可知,

$$Im(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = Im(\mathscr{A}) \oplus Im(\mathscr{B}).$$

故β_i, $i = 1, \ldots, r, m-s+1, \ldots, m$线性无关, 将其扩充为$V$的一组基$\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 则

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix}.$$

□

Jordan标准形

设$\mathscr{A}$ 是线性空间V上的线性变换. 则

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s, \quad W_i\text{是}\mathscr{A}\text{的不变子空间} \Leftrightarrow$$

$$\text{方阵}A\text{相似于准对角阵}diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

其中A_i为$\mathscr{A}|_{W_i}$在某组基下的矩阵, $i = 1, 2, \ldots, s$.

(空间第一分解定理) 设线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$. 则

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s,$$

其中$W_i = Ker(\lambda_i \mathscr{I} - \mathscr{A})^{n_i}$ 为$\mathscr{A}$的根子空间, 且$\mathscr{A}|_{W_i}$ 的特征多项式为$(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

对应代数: 任意复方阵A相似于准对角阵$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$, 且$A_i$的特征多项式为$(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

(空间第二分解定理) 设W_i是线性变换$\mathscr{A}$ 的属于特征值λ_i的根子空间. 则

$$W_i = C_{i1} \oplus C_{i2} \oplus \ldots \oplus C_{ik_i},$$

其中C_{ij} 为$(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{I})|_{W_i}$的循环子空间.

对应代数: 方阵A_i相似于准对角阵$diag(J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{ik_i})$, 其中$J_{ij}$ 为Jordan块矩阵.

Example

例11 设A为单纯方阵, 即A的特征多项式等于最小多项式. 证明: 与A乘法交换的方阵B均可以写成A的多项式.

证明.

设$\mathscr{A},\mathscr{B}:V\to V$ 是在某组基下与A 与B 对应的线性变换. 由$\mathscr{A}$的特征多项式等于最小多项式知, $V=\mathbb{C}[\mathscr{A}]\alpha$ 是由向量α生成的循环子空间. 由$\mathscr{B}\alpha\in V=\mathbb{C}[\mathscr{A}]\alpha$ 知, 存在多项式f 使得$\mathscr{B}\alpha=f(\mathscr{A})\alpha$. 对$V$中任意向量$\beta=g(\mathscr{A})\alpha$有

$$\begin{aligned}\mathscr{B}\beta &= \mathscr{B}g(\mathscr{A})\alpha = g(\mathscr{A})\mathscr{B}\alpha \\ &= g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\alpha = f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})\alpha = f(\mathscr{A})\beta.\end{aligned}$$

故$\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$, 从而$B=f(A)$.

□

Schmidt正交化

Schmidt正交化: 从欧氏空间的一组基$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$出发可以构造一组标准正交基$\beta_1, \ldots, \beta_n$, 即

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)T,$$

其中T为上三角阵, 且对角元均为正.

Example

例12 (矩阵的QR分解) 设A为n阶实可逆方阵, 则存在正交阵Q及上三角阵R满足$A = QR$.

解: 对A的列向量$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 正交化得到一组标准正交基$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 记$Q = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, 则存在上三角阵$T$满足$Q = AT$, 于是$A = QT^{-1} = QR$. R为上三角阵.

对偶基

设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 为线性空间V的一组基，$f^1,\ldots,f^n$为其对偶基，即$f^i(\alpha_j)=\delta_{ij}$.

设$\beta_1,\ldots,\beta_n$ 为线性空间V的另一组基，$g^1,\ldots,g^n$为其对偶基，即$g^i(\beta_j)=\delta_{ij}$.

设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 到$\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ 的过渡矩阵为A,

则$\{g^1,\ldots,g^n\}$ 到$\{f^1,\ldots,f^n\}$ 的过渡矩阵为A^T.

背景

- 三类应用案例:
- 趣味应用案例：一些初等的趣味数学问题
- 方法应用案例: 应用数学中重要的基本方法
- 前沿应用案例：科学技术前沿中的应用

趣味应用案例

- Fibonacci数列
- 社团个数问题
- 关灯游戏
- 给定边长的单形是否存在
- 等角线有多少条
- 蚂蚁的行走路线
- 长方形的正方形覆盖
- ……

背景

方法类应用案例

- 最小二乘法
- 主成分分析
- 奇异值分解
- 多项式结式
- 层次分析法
- 马尔科夫过程
- ....

背景

科技前沿应用案例

- Google搜索
- 推荐系统
- 图像压缩
- 图像变形
- 神经网络
- ....

《线性代数与解析几何》国家级精品共享课程网站:
$http://www.icourses.cn/sCourse/course\_3066.html$

B站：少年班精品课程《线性代数》

谢谢聆听！